1　存在条件を求める

ここで扱うのは「△を満たすような□が存在するための○の条件を求めよ」といった類の問題です．私はこの手の問題が解けなく，浪人してようやく理解できるようになりました．これを理解したとき，視界がパッと開けたのを覚えています．

―――――――――――――――――――――――――――――――

まず，この手の問題の基本方針を述べておくことにします．

１．存在条件を求めたい文字を**実数定数**と見たときの，他の変数についての存在条件を考える．
２．ある文字を固定して，そのとき，他の文字を動かしたときのとりうる値の範囲を考える．
３．実際に動かしてみる．

１で言う存在条件とは，方程式 · 不等式 · 図形と見たときの，解 · 共有点が存在する条件のことになります．また，３に実際に動かしてみるとあるのは，実はこの種の問題は写像の問題として出されることが少なくないからです．この分野の問題はとにかく思考力が必要なので，要点だけを捉えてあとは自分の頭で何度も思考を繰り返すのが効果的で，しかも多岐に渡るので，私のような頭の悪い人には自分のものにできるようになるには一朝一夕ではなかなか難しいです．また問題によっては１～３すべてが有効なものもありますが，やはりどれか一つが考えやすいというものもあります．問題に応じて，どれがベストな選択であるかも大切となります．
さて具体的に次の例題を見てみましょう．まずは１が有効なものから．

例１

点 (x, y) が, 原点を中心とする半径１の円の内部を動くとき， 点 $(x+y, xy)$ の動く範囲を図示せよ．

(東大 1955)

$(x+y, xy)$ の動く範囲なのでこれらが存在条件を求めたい文字です．ところが，$x+y, xy$ はいずれも式となっているので，式変形をしていくうちに，バラバラになってしまう恐れがあります．そこで、
$x+y=X$
$xy=Y$
などと文字でおくことにします．そして、X, Y を定数として扱い x, y が実数として存在するための X, Y の条件を考えていきます．

(解)$x+y=X, xy=Y$ とおく．

$$\begin{cases} x+y=X \cdots ① \\ xy=Y \cdots ② \\ x^2+y^2<1 \cdots ③ \end{cases}$$

を満たすような x, y が存在するための X, Y の条件を求めればよい．

③ より，$(x+y)^2-2xy<1$
ゆえに，$X^2-2Y<1 \cdots ④$
また，x, y は、t の２次方程式
$t^2-Xt+Y=0 \cdots (*)$
の解であり，x, y は実数であるから，判別式を D とすると，
$D=X^2-4Y \geqq 0 \cdots ⑤$
④, ⑤ を満たす X, Y が，求める範囲である．

なかには，いきなり $(*)$ の式が出てくるのにびっくりする人もいるかもしれませんが，これは解と係数の関係を逆に利用したものです．
t の二次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$ は $t=x, y$ を解に持ちます．だから，$t=x, y$ を解にもつ t の二次方程式の一つは $t^2-(x+y)t+xy=0$ なのです.「t の二次方程式の一つ」と言ったのはたとえば他にも，$2t^2-2(x+y)t+2xy=0$ なども，$t=x, y$ を解に持つ二次方程式となりうるから．
なぜこのような t の二次方程式を持ち出したのかというと，判別式を使うことにより，簡単に x, y の実数条件が出てくるからということになります．
このような逆利用の仕方を知らなかった人はこの機会に是非おぼえておいた方が良いです．人によっては「なぜこんなこと思いつくのだ」と言うかも知れないし，もちろん私のような凡人には思いつきません．だから一つの手法として意識的に心に留めておきます．それが勉強です．高校数学は発想力だけの世界ではありません．
では，解と係数の関係も知らない，さらには $x^2+y^2<1$ が $x+y, xy$ で表せることも知らない人はこの問題を解くことはできないのでしょうか．実はそんな手法を知らなくても解くことは出来ます．①, ② より，x, y を X, Y で表し，③ に代入すればよいのです．このときに，x, y が実数であることに注意が必要です．

(別解)$x+y=X, xy=Y$ とおく．
$x+y=X, xy=Y \Leftrightarrow y=X-x, xy=Y$
として y を消去し,
$Y=x(X-x) \Leftrightarrow x^2-Xx+Y=0$

$$\therefore x=\frac{X \pm \sqrt{X^2-4Y}}{2} \cdots \ (1)$$

$$y=X-x=\frac{X \mp \sqrt{X^2-4Y}}{2} \cdots \ (2)$$

x, y は実数なので,

$$X^2-4Y \geqq 0 \Leftrightarrow Y \leqq \frac{X^2}{4} \cdots (3)$$

また，(1),(2) を $x^2+y^2<1$ に代入して，

$$\left(\frac{X \pm \sqrt{X^2-4Y}}{2}\right)^2+\left(\frac{X \mp \sqrt{X^2-4Y}}{2}\right)^2<1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{X+\sqrt{X^2-4Y}}{2}\right)^2+\left(\frac{X-\sqrt{X^2-4Y}}{2}\right)^2<1$$

$$\Leftrightarrow Y<\frac{X^2-1}{2} \cdots (4)$$

$\therefore$(3),(4) を満たす X, Y が求める範囲である．

ということで，１で考えようと思ったときに迷ったら，

変数とみた文字で解いて代入

すれば良いのです．そして，変数とみた文字は最後には消去されます．また，実数条件には十分に注意！例 1 では変数とみた文字は x, y であるので，$x = \boxed{X, Y\text{ の式}}, y = \boxed{X, Y\text{ の式}}$ にしています．